



TITLE:

# Surface Bundles over $S^1$ Which Are 2-Fold Branched Coverings of $S^3$ (結び目理論)

AUTHOR(S):

作間, 誠

---

CITATION:

作間, 誠. Surface Bundles over  $S^1$  Which Are 2-Fold Branched Coverings of  $S^3$  (結び目理論). 数理解析研究所講究録 1981, 442: 1-15

ISSUE DATE:

1981-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102851>

RIGHT:

# Surface Bundles over $S^1$ which are 2-fold Branched Coverings of $S^3$

大阪市大 理 作間 誠

$F_g$  を genus  $g$  の closed orientable surface とすると、  
 $F_g \times S^1$  ( $g \geq 1$ ) は  $S^3$  の 2-fold branched cover になる  
 事柄が知られている。(Fox [3], Hirsh-Neumann [5],  
 Montesinos [8]) ところが、最近、落合-高橋 [10] は、  
 すべての自然数  $g$  に対して、 $S^3$  の 2-fold branched cover にな  
 る  $S^1$  上の  $F_g$ -bundle が存在する事を示した。(実際には、  
 すべての自然数  $g$  に対して、Heegaard genus が 2 である  
 $F_g$ -bundle が構成されている。) 更に、ここでは、Heegaard  
 genus が 2 である torus bundle の分類が行なわれた。  
 そこで、ここでは、どのような  $F_g$ -bundle が  $S^3$  の 2-fold  
 branched covering になるか? という問題について考える。

記号

以下、surface  $F_g$  には一つの longitude-meridian

system  $\{l_i, m_i (1 \leq i \leq g)\}$  が与えられておるとする。

$F_g$  上の homeomorphism  $\phi$  に対して  $M_\phi \in F_g \times [0, 1] / (x, 0) \sim (\phi(x), 1)$

とする。又、 $\phi$  が誘導する  $H_1(F_g)$  上の isomorphism  $\phi_*$  を

基底  $\{l_i, m_i\}$  に関して表現する行列を  $A_\phi$  で表わす。(i.e.

$$\phi_* \begin{pmatrix} l_i \\ m_i \end{pmatrix} = A_\phi \begin{pmatrix} l_i \\ m_i \end{pmatrix} \text{ で表わされる行列 } ) .$$

$g = 1$  の時、対応  $\phi \mapsto A_\phi$  は、torus の homeotopy group である

$GL(2, \mathbb{Z})$  への anti-isomorphism になる。  $A \in GL(2, \mathbb{Z})$  には

対応して  $\phi_A$  を torus 上の homeomorphism と  $A\phi_A = A$  となるもの

とし、又、torus bundle  $M_{\phi_A}$  を  $M_A$  で表わす。

### § 1. Homological Condition

$M_\phi$  を  $F_g$ -bundle とすると、 $H_1(M_\phi) \cong \mathbb{Z} \oplus \text{Coker}(\phi_* - 1)$

となる。  $H_1(F_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$  であるので、 $\text{Coker}(\phi_* - 1)$  は

$\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_g} \oplus \mathbb{Z}_{n_{g+1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_{2g}}$  ( $n_i$ : non-negative integer,

$n_i | n_{i+1}$ ) と表わせる。この時、次が成り立つ。

定理 1 もし  $M_\phi$  が  $S^3$  の 2-fold branched cover になる

ならば、 $n_g$  は 1 または 2 である。逆に  $\{n_i\}_{1 \leq i \leq 2g}$  を

$n_i | n_{i+1} (1 \leq i \leq 2g-1)$ ,  $n_g = 1$  or  $2$  なる non-negative integer

の列とすると、 $S^3$  の 2-fold branched cover になる  $F_g$ -bundle

$M$  で  $H_1(M) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_{2g}}$  となるものが存在する。

この定理の証明のためには次の補題が必要である。

補題 1  $M$  を  $S^3$  の 2-fold branched cover とする。すると、  
 任意の  $x, y \in H_2(M; R)$  に対して  $2 \operatorname{int}(x, y) = 0$  in  $H_1(M; R)$ .  
 但し  $R$  は任意の環で、 $\operatorname{int}$  は intersection pairing:  $H_2(M; R) \times H_2(M; R) \rightarrow H_1(M; R)$  を表わす。

(証明は [12] 参照)

(定理 1 の前半の証明)  $\eta$  を natural map  
 $H_1(F_g; \mathbb{Z}_{n_g}) \rightarrow \operatorname{Coker}(\phi_* - 1; H_1(F_g; \mathbb{Z}_{n_g})) \hookrightarrow H_1(M_\phi; \mathbb{Z}_{n_g})$   
 とする。すると、 $\operatorname{Coker}(\phi_* - 1; H_1(F_g; \mathbb{Z}_{n_g})) \supset (\mathbb{Z}_{n_g})^{g+1}$  である事より、  
 $\operatorname{Ker}(\phi_* - 1; H_1(F_g; \mathbb{Z}_{n_g}))$  の元  $z$  で、 $\eta(z) \in H_2(M_\phi; \mathbb{Z}_{n_g})$  の位数が  
 $n_g$  であるものが存在する事がわかる。  $\phi_*(z) = z \in H_1(F_g; \mathbb{Z}_{n_g})$   
 であるので、2-chain  $z \times [0, 1]$  ( $\subset F_g \times [0, 1] / \phi = M_\phi$ ) は  
 自然に  $H_2(M_\phi; \mathbb{Z}_{n_g})$  の元  $\hat{z}$  を決める。今、fiber  $F_g$  から作る  
 $H_2(M_\phi; \mathbb{Z}_{n_g})$  の元を  $[F_g]$  で表わすと、 $\operatorname{int}(\hat{z}, [F_g]) = \eta(z)$   
 $\in H_1(M_\phi; \mathbb{Z}_{n_g})$  である事がわかる。ところで  $\eta(z)$  の位数は  
 $n_g$  であるので、 $n_g \neq 1$  の 2 倍は、補題 1 により  $M_\phi$  は  
 $S^3$  の 2-fold branched cover に変わりない。  $\square$

(定理1の後半の証明) 整数の組  $\{\alpha_i, \beta_i\}_{1 \leq i \leq g}$  に対し  $K(\alpha_1, \dots, \alpha_g; \beta_1, \dots, \beta_g)$  を図1で示される  $S^3$  中の link とする。

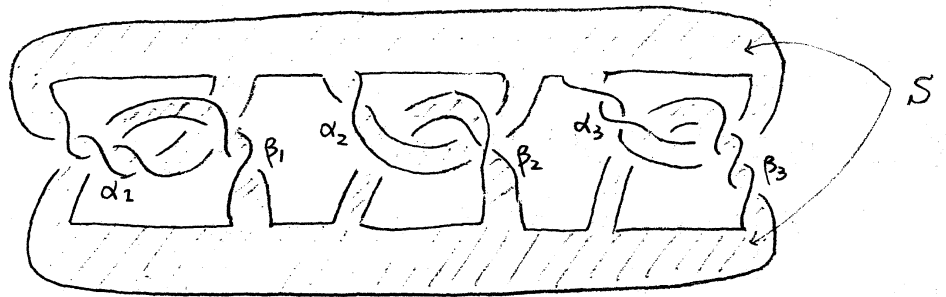


図1 ( $K(3, 1, -2; 2, 1, 3)$ )

( $\alpha_i, \beta_i$  は right-hand half twists の数を表わす.)

すると、 $K(\alpha_1, \dots, \alpha_g; \beta_1, \dots, \beta_g)$  の 2-fold branched cover  $M$  は  $F_g$ -bundle である。

- ①  $S$  を図1の斜線部で表わされる  $K(\alpha_1, \dots, \beta_g)$  を張る surface とすると、 $M$  は  $S^3$  を  $S$  で切り開いた空間の二つのコピーを張り合わせて得られる。とるから、 $S^3$  を  $S$  で切り開くと  $F_g \times I$  になるので、 $M$  は  $F_g$ -bundle になる。

更に、その monodromy に対応する matrix  $A$  は  $\bigoplus_{i=1}^{2g} \begin{pmatrix} -1 & -\alpha_i \\ \beta_i & \alpha_i\beta_i - 1 \end{pmatrix}$

で与えられる事かわかる。従って  $H_1(M) \cong \mathbb{Z} \oplus \text{Coker}(A-I)$

$\cong \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{i=1}^g \{ \mathbb{Z}g_i \oplus \mathbb{Z}(|\alpha_i\beta_i - 4|/g_i) \}$  (但し  $g_i = \gcd\{2, \alpha_i, \beta_i\}$ )

となる。 $\alpha_i, \beta_i$  を適当に選べば定理1の後半の証明が出来る。□

註 この証明と同様な構成方法により、任意の closed orientable 3-manifold は surface bundle を branched cover に持つ事がわかる。言い換えれば、すべての closed orientable 3-manifold は、surface bundle を involution で割る事によりできる。

## § 2. Torus Bundles

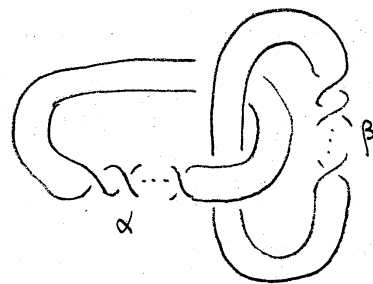
J. L. Tollefson [14] は、 $H_1(M_\Phi; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$  なる surface bundle  $M_\Phi$  上の involution は fiber preserving である事を示した。この結果は、もう少し一般的な条件の下で成り立つ事がわかる。特に、 $M_\Phi$  上の involution  $\alpha$  に対して、 $M_\Phi/\alpha \cong S^3$  なら、 $\alpha$  は fiber preserving である事がわかる。これより、次の事がわかる。

定理 2  $S^3$  内の link で torus bundle を 2-fold branched cover に持つものは、 $K(\alpha; \beta)$  に限る。

特に、 $S^3$  の 2-fold branched cover になる torus bundle は  $M_{\alpha, \beta}$  に限る。

但し  $M_{\alpha, \beta}$  は  $A_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha \\ \beta & \alpha\beta - 1 \end{pmatrix}$  を

monodromy に持つ torus bundle を表わす。



$K(\alpha; \beta)$

$K(\alpha; \beta)$  については次の事が成り立つ。

- $K(\alpha; \beta) \cong K(\alpha'; \beta') \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = \pm(\alpha', \beta')$  or  $\pm(\beta', \alpha')$
  - $K(\alpha; \beta)$  の bridge index が 3 以下  $\Leftrightarrow \alpha$  or  $\beta = \pm 1$
- 従って、Birman-Hilden [1] を使って次を得る。

系 (Theorem 3 of Ochiai-Takahashi [10])

Orientable torus bundle で Heegaard genus が 2 になるのは  $M_{1, \beta}$  ( $\beta \in \mathbb{Z}$ ) に限る。しかも  $M_{1, \beta}$  の genus 2 の Heegaard splitting は一意である。

註  $M_{1, \beta}$  は [10] で定義されている  $M(\beta-2, -1)$  に同相である。又、[10] では、non-orientable torus bundle についても調べている。

### §3. Invariants of Torus Bundles

前セクションで、 $S^3$  の 2-fold branched cover になる torus bundle をすべて挙げたが、このセクションでは、 $\{M_{\alpha, \beta}\}$  の同相問題を調べる。又、与えられた  $SL(2, \mathbb{Z})$  の元  $A$  に対して、 $MA$  が  $S^3$  の 2-fold branched cover になるかどうかの判定方法を与える。このためには、次の補題が必要である。

補題 2.  $A, A' \in GL(2, \mathbb{Z})$  とする。この時、 $M_A$  が  $M_{A'}$  に同相であるための必要十分条件は、 $A$  が  $A'$  または  $A'^{-1}$  に  $(GL(2, \mathbb{Z}))$  の中で conjugate である事である。

補題 3  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$  とすると次が成り立つ

- (1)  $\text{Tr } A = 2\varepsilon$  ( $\varepsilon = \pm 1$ ) ならば、唯一つの non-negative integer  $n$  が存在し、 $A$  は  $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ n & \varepsilon \end{pmatrix}$  に conjugate である。
- (2)  $\text{Tr } A = -1$  (resp.  $0, 1$ ) とすると、 $A$  は  $A_{1,1}$  (resp.  $A_{1,2}, A_{1,3}$ ) に conjugate である。
- (3)  $|\text{Tr } A| \geq 3$  の時。  $\theta(A) = \{(a-d) + \sqrt{D_A}\} / 2c$  (但し  $D_A = (a-d)^2 + 4bc = (\text{Tr } A)^2 - 4$ ) は二次の無理数になり、 $A$  の  $GL(2, \mathbb{Z})$  での conjugate class は、 $\theta(A)$  の連分数展開の純循環部分 (但し up to cyclic permutation) で決まる。([4] 参照)

補題 4  $A_{\alpha, \beta}$  について次が成り立つ。

- (1)  $A_{\alpha, \beta}, A_{-\alpha, -\beta}, A_{\beta, \alpha}, A_{-\beta, -\alpha}$  は互いに conjugate である。  
(よって以下  $1 \leq \alpha \leq |\beta|$  とは  $0 = \alpha \leq \beta$  としてよい。)
- (2)  $A_{\alpha, \beta}$  は  $A_{\alpha, \beta}^{-1}$  に conjugate である。
- (3)  $\text{Tr } A_{\alpha, \beta} = -2 \Leftrightarrow \alpha = 0$ 。
- (4)  $\text{Tr } A_{\alpha, \beta} = 2 \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (1, 4) \text{ or } (2, 2)$ 。  
よって  $A_{1,4} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_{2,2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 。



$$(5) \quad \text{Tr } A_{\alpha, \beta} = -1 \quad (\text{resp. } 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (1, 1) \quad (\text{resp. } (1, 2), (1, 3))$$

(6)  $|\text{Tr } A_{\alpha, \beta}| \geq 3$  の時.  $\theta(A_{\alpha, \beta})$  の連分式展開の純循環部分は次で与えられる.

$$[\dot{\alpha}, |\dot{\beta}|] \quad \text{if } \beta < 0$$

$$[\dot{1}, (\dot{\beta}-4)] \quad \text{if } \alpha = 1, \beta \geq 5$$

$$[\dot{2}, (\dot{\beta}-2)] \quad \text{if } \alpha = 2, \beta \geq 3$$

$$[\dot{1}, (\alpha-2), 1, (\dot{\beta}-2)] \quad \text{if } \alpha \geq 3, \beta \geq 3.$$

(補題の証明は [12] 参照)

以上により、 $\lambda$  を得る事が出来る。

定理 3 (Branch line の一意性)

$M_{1,6}$  は  $M_{2,3}$  に同相である。しかし、この例外を除いて、 $M_{\alpha, \beta}$  の位相型は  $K(\alpha; \beta)$  の link type で一意に決まる。

定理 4 (判定方法)

$A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  とする。  $M_A$  が  $S^3$  の 2-fold branched cover になるためには、 $\lambda$  の (1)~(3) の 1 つれかが成り立つ事が、必要十分である。

$$(1) \quad -2 \leq \text{Tr } A \leq 1.$$

(2)  $\text{Tr } A = 2$  のとき  $\text{Coker}(A-I) \cong \mathbb{Z}$  or  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ ,

(3)  $|\text{Tr } A| \geq 3$  の時。  $\alpha\beta = \text{Tr}(A) + 2$  とする整数で、  
 $\theta(A)$  の純循環部分  $\theta(A, \beta)$  のそれに (up to cyclic permutation で) 一致するものがある。

例 1  $H_1(M_A) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n \quad (0 \leq n \leq 11, \text{ or } n=14, 16, 19)$   
 $\quad \quad \quad \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2n} \quad (0 \leq n \leq 4)$

$\Rightarrow M_A$  は  $S^3$  の 2-fold branched cover.

例 2  $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$  とすると  $H_1(M_A) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}$  となり

定理 1 で与えられた必要条件を満たす。しかし  $\text{Tr } A = -10$ ,  
 $\theta(A) = \sqrt{96}/6 = [1, 1, 1, 1, 2]$  となり、定理 4 の条件 (3)  
 を満たさない。よって  $M_A$  は  $S^3$  の 2-fold branched cover に  
 ならない。

例 3  $\dim_{\mathbb{Q}} H_1(M; \mathbb{Q}) \cong 2$  の時。  $M$  が  $S^3$  の 2-fold  
 branched cover になるための必要十分条件は、 $H_1(M) \cong$   
 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  又は  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$  となる事である。

#### §4. Abelian Coverings and Regular Coverings.

Torus bundle について、 $S^3$  の regular covering になるかどうかも判定できる。但しここでは、多様体  $M$  が  $S^3$  の regular cover になるとは、 $M$  上の finite group action  $G$  があつ、 $M/G \cong S^3$  となる事とする。(  $G$  の singular orbit は manifold になるとは限らない。 )

定理 5 Torus bundle  $M_A$  に対して次は同値。

- (1)  $M_A$  は  $S^3$  の regular cover になる。
- (2)  $M_A$  は  $S^3$  の  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$  cover になる。
- (3) (イ)  $|\text{Tr} A| \leq 2$  または (ロ)  $|\text{Tr} A| \geq 3$  の時、 $\theta(A)$  の純循環部分を  $[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$  とすると、ある奇数  $k$  が存在して  $(\alpha_n, \dots, \alpha_1) = (\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_n, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$  となる。

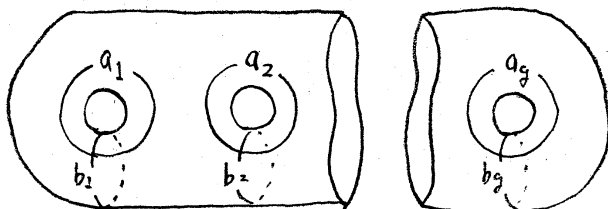
例 4 例 2 の torus bundle は  $S^3$  の  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ -cover になる。

例 5  $A_k = \begin{pmatrix} 3k+4 & 3k+1 \\ 2k+3 & 2k+1 \end{pmatrix} \quad (k \geq 3)$  とすると

$\theta(A_k) = [i, 2, k, i]$ 。よつ  $M_{A_k} \quad (k \geq 3)$  は  $S^3$  の regular cover になる。

Addendum 1

$\{a_i, b_i \mid (1 \leq i \leq g)\}$  を下図で示される  $F_g$ -上の simple closed curves とする。



$\pm(a_i)$  (resp.  $\pm(b_i)$ ) で  $a_i$  (resp.  $b_i$ ) に沿った Dehn twist を表わす。今、 $g \geq 3$  とし、 $\{n_1, \dots, n_g\}$  を互いに相異なる自然数の組で  $n_i \geq 3$  ( $1 \leq i \leq g$ ) なるものとする。

$\Phi = \prod_{i=1}^{2g} \pm(a_i) \cdot \pm(b_i)^{-n_i+1}$  を  $F_g$ -上の homeomorphism とする。

Raymond - Tollefson [11] は、対応する  $F_g$ -bundle  $M_\Phi$  は non-trivial periodic map を持たないことを主張した。しかし、これは誤りである。実際、 $M_\Phi$  は  $S^1$  で定義した link  $K(n_1+3, \dots, n_g+3; 1, \dots, 1) \subset S^3$  の 2-fold branched cover になり、従って non-trivial involution を持つ事がわかる。

しかし、誤りの原因は、簡単な計算ミスにあり、

Raymond - Tollefson の idea (元々、Conner - Raymond に依る idea) は有効である。例えば、 $\{k_1, \dots, k_g\}$  を互いに相異なり、 $k_i \geq 3$  ( $1 \leq i \leq g$ ) である自然数の組とし、

$\bar{\psi}' = \prod_{i=1}^3 t(a_i) \cdot t(b_i)^{-k_i} \cdot t(a_i)^2 \cdot t(b_i)^{-1}$  とすると、 $M_{\bar{\psi}}$  は non-trivial periodic map を持たない可能性がある。実際、この  $M_{\bar{\psi}'}$  については、[11] の議論の前半は成立する。 $(M_{\bar{\psi}}$  については成り立たない。) もし、次が証明できれば、 $M_{\bar{\psi}'}$  は non-trivial map を持たない事がわかる。

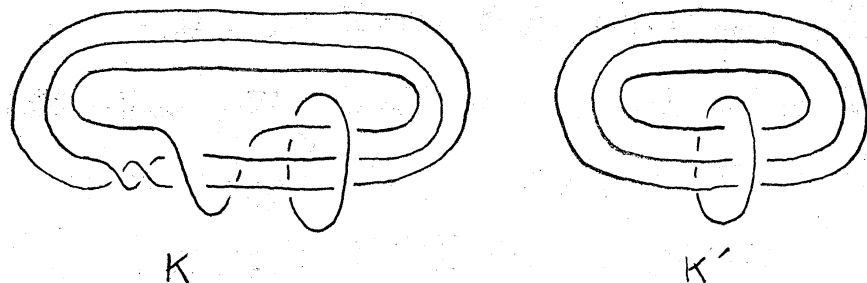
★ 任意の  $F_g$  上の involution  $\alpha$  に対して、 $\bar{\psi}'$  は  $\alpha \bar{\psi}' \alpha^{-1}$  に homotopic でない。(  $\alpha$  は 2-fold branched cover  $F_g \rightarrow S^2$  に対応する involution とする。)


### Addendum 2

ここにこの問題に解答を与える。(Problem 25 of "Knot Theory" Lect. Notes in Math. 685, Springer 1978, p311)

問題  $S^3$  内の 2 つの link  $\psi$ , 補空間は同相であるか、2-fold branched cover の 1次元 Betti 数か異なるものがあるか。

下図で示される二つの link  $K, K'$  を考える。



すると、 $K$  と  $K'$  の補空間は同相である。 $K$  は §1 で定義した link  $K(2; 2)$  と同じであり、従って  $K$  の 2-fold branched cover は Betti-number が 2 である torus bundle になる。一方、 $K'$  は  $(2, 2)$ -torus link  の 3 つの sum であるので、 $K'$  の 2-fold branched cover は  $\# \mathbb{RP}^3$  となり、従って Betti-number は 0 である。

更に次が成り立つ事がわかる。

- (1) 2-components link の 2-fold branched cover の Betti-number は link complement で決まる。
- (2) components の数が 3 以上の時は、上は成り立たない。
- (3)  $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$  ( $\mu$ -components link) に対して、 $d = \text{g.c.d.} \{ \text{lk}(K_i, K_j) \mid 1 \leq i < j \leq \mu \}$  は link complement で決まる。更に、 $d \equiv 0 \pmod{2}$  ならば、2-fold branched cover の 1次元 Betti-number は link-complement で決まる。
- (4)  $\mu$ -components link  $L$  の 2-fold branched cover  $\Sigma_2(L)$  に対して  $\dim_{\mathbb{Z}_2} H(\Sigma_2(L), \mathbb{Z}_2) = \mu - 1$  となる。従って link の 2-fold branched cover の 1次元  $\mathbb{Z}_2$ -Betti number は components の数で決まる。

# 参 考 文 献

- [1] J.S. Birman - H.M. Hilden: Heegaard splittings of branched coverings of  $S^3$ , Trans. A.M.S. 213 (1975) 313-352.
- [2] Gr. Bredon: Introduction to compact transformation groups, 1972, Academic Press.
- [3] R. H. Fox: A note on branched cyclic coverings of spheres, Rev. mat. Hisp.-Amer., 32 (1972), 158-166.
- [4] G. H. Hardy - F. M. Wright: An introduction to the theory of numbers, 1964, Oxford: Clarendon.
- [5] U. Hirsh - W. D. Neumann: On cyclic branched coverings of spheres, Math. Ann., 215 (1975), 289-291
- [6] Y. Kikuchi: On Heegaard splittings of torus bundles, Master thesis, Tokyo Institute of Technology, 1980.
- [7] C. G. Latimer - C. C. MacDuffee: A correspondence between classes of ideals and classes of matrices, Ann. of Math., 34 (1933), 313-316
- [8] J. M. Montesinos: 3-varietés qui ne sont pas des revêtements cycliques ramifiés sur  $S^3$ , Bull. A.M.S., 80 (1974) 845-846.
- [9] D. A. Neumann: 3-manifolds fibering over  $S^1$ , Proc. A.M.S., 58 (1976), 353-356.

- [10] M. Ochiai - M. Takahashi: Heegaard diagrams of torus bundles over  $S^1$ , preprint.
- [11] F. Raymond - J. L. Tollofson: Closed 3-manifolds with no periodic maps, Trans. A. M. S. 221 (1976) 403-418.
- [12] M. Sakuma: Surface bundles over  $S^1$  which are 2-fold branched cyclic coverings of  $S^3$ , Math. Semi. Notes Kove Univ., 9 (1981) 159-180.
- [13] O. Tausky: On a theorem of Laitner and MacDuffee, Can. J. Math., 1 (1949), 300-302.
- [14] J. L. Tollofson: Periodic homeomorphisms of 3-manifolds fibered over  $S^1$ , Trans. A. M. S., 223 (1976), 223-234.